Analiza III, pismeni ispit, 29.06.2015.

1. (50%)(a) Posmatrajmo funkciju $f(x,y)$ dvije varijable definisanu na sljedeći način

$$f(x,y) = -\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Odrediti limes kada $(x,y) \to (0,0)$ duž sljedećih krivih: (I) x-ose, (II) y-ose, (III) prave $y = x$, (IV) prave $y = -x$ i (V) parabole $y = x^2$.

(50%)(b) Ispitati neprekidnost funkcije $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2. Izračunati $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$

3. Izračunati površinski integral $\displaystyle\oiint_{-S} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ gdje je S-površina tetraedra ograničen ravnima $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ i $z=0$.

4. Izračunati cirkulaciju polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ duž odsječka prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte.

Analiza III, pismeni ispit, 29.06.2015.

1. (50%)(a) Posmatrajmo funkciju $f(x,y)$ dvije varijable definisanu na sljedeći način

$$f(x,y) = -\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Odrediti limes kada $(x,y) \to (0,0)$ duž sljedećih krivih: (I) x-ose, (II) y-ose, (III) prave $y = x$, (IV) prave $y = -x$ i (V) parabole $y = x^2$.

(50%)(b) Ispitati neprekidnost funkcije $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2. Izračunati $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$

3. Izračunati površinski integral $\displaystyle\oiint_{-S} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ gdje je S-površina tetraedra ograničen ravnima $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ i $z=0$.

4. Izračunati cirkulaciju polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ duž odsječka prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte.

(#) Posmatrajmo f-ju $f(x,y)$ dvije varijable definiranu na sljedeći način

$$f(x,y) = -\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Odrediti limes kada $(x,y)\to(0,0)$ duž sljedećih krivih:

(I) x-ose

(II) y-ose

(III) prave $y=x$

(IV) prave $y=-x$

(V) parabole $y=x^2$.

Rj. Jedan od načina za rješavanje ovog zadatka je sljedeći:

(I) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(-\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \left|\begin{array}{ll}\text{ako se približavamo} & \text{x-osu parametarski}\\ \text{tački }(0,0)\text{ duž x-ose} & \text{možemo napisati}\\ \text{vrijednost od y je nula} & \text{i kao } x=t,\ y=0\end{array}\right|$$

$$= \lim_{t\to0}\left(-\frac{0}{t^2}\right) = \lim_{t\to0} 0 = 0$$

(II) y-osu parametarski možemo prikazati sa $\begin{cases} x=0\\ y=t\\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to0} f(0,t) = \lim_{t\to0}\left(-\frac{0}{t^2}\right) = \lim_{t\to0} 0 = 0$$

(III) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left|\begin{array}{l}\text{duž prave}\\ y=x\end{array}\right| = \lim_{x\to0} f(x,x) = \lim_{x\to0}\left(-\frac{x^2}{x^2+x^2}\right) = \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

(IV) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left|\begin{array}{l}\text{duž prave}\\ y=-x\end{array}\right| = \lim_{x\to0} f(x,-x) = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(V) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left|\begin{array}{l}\text{duž parabole}\\ y=x^2\end{array}\right| = \lim_{x\to0} f(x,x^2) = \lim_{x\to0}\left(-\frac{x^3}{x^2+x^4}\right) = -\lim_{x\to0}\frac{x}{1+x^2} = 0$$

Ispitati neprekidnost f-je $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+3y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Rj. Prisjetimo se:

Za f-ju f dvije promjenjive kažemo da je neprekidna u tački (a,b) akko

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Kažemo da je f neprekidna na oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački $(a,b) \in D$.

Jedina sumnjiva tačka u kojoj f-ja može imati prekid je tačka $(0,0)$.
F-ja $f(x,y)$ će biti neprekidna u tački $(0,0)$ akko

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

tj. akko $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{približavajmo} \\ \text{se tački } (0,0) \\ \text{duž x-ose} \end{array} \right| = \lim_{x\to0} f(x,0) = \lim_{x\to0} 0 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{približavajmo} \\ \text{se tački } (0,0) \\ \text{duž prave } y=x \end{array} \right| = \lim_{x\to0} f(x,x) = \lim_{x\to0} \frac{x^2x^2}{x^4+3x^4} = \lim_{x\to0} \frac{x^4}{4x^4} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \qquad \ldots(2)$$

Na osnovu (1) i (2) možemo zaključiti da dati limes ne postoji.
F-ja ima prekid u tački $(0,0)$.

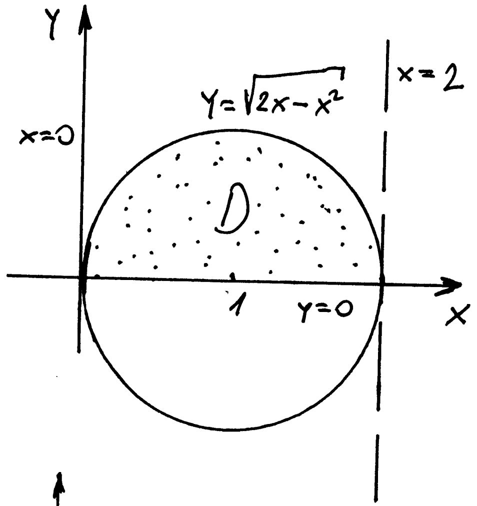
\# Izračunati

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy.$$

Rj. Primetimo da je $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$ oblast integracije.

Skicirajmo D

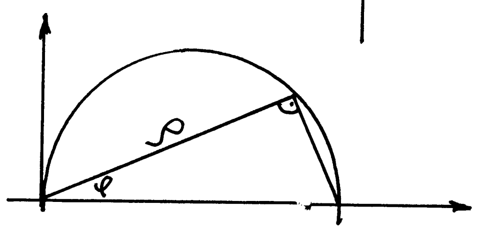
$$y = \sqrt{2x-x^2}$$
$$y^2 = 2x - x^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1^2$$



Uvedimo polarne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$D \xrightarrow{\text{transformacija}} D': \begin{cases} 0 \le \rho \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\cos\varphi = \frac{\rho}{2} \Rightarrow \rho = 2\cos\varphi$$

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy = \left| \begin{matrix} \text{uvodimo} \\ \text{polarne} \\ \text{koordinate} \end{matrix} \right| =$$

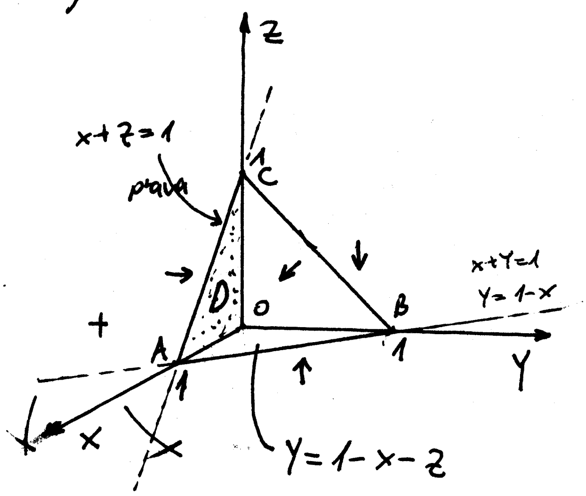
$$= \iint_{D'} \frac{\rho\cos\varphi}{\rho}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho\, d\rho = \begin{matrix} \text{lagana} \\ \text{vježba} \\ \dots \end{matrix} = \frac{4}{3}$$

(7) Izračunati površinski integral $K=\oiint\limits_{-W} y\,dx\,dz$ gdje je

W - površina tetraedra ograničenog ravnima $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ i $z=0$.

Rj: integral oblika $\iint\limits_{W} R(x,y,z)\,dx\,dz$ zovemo površinski integral drugog tipa. Računamo ga tako što napravimo projekciju D površi W na xOz ravan i odredimo predznak broja $\cos\beta$ gdje je β ugao koji zaklapa vektor normale $\vec{n}$ površi W sa Y-osom.

Skicirajmo naš tetraedar



Kako je u zadatku data oblast $-W$ to posmatramo vektore normale koje odgovaraju unutrašnjim površinama tetraedra

$$K=\oiint\limits_{-W} y\,dx\,dz=\iint\limits_{-\Delta AOC} y\,dx\,dz+\iint\limits_{-\Delta AOB} y\,dx\,dz+\iint\limits_{-\Delta BOC} y\,dx\,dz+\iint\limits_{-\Delta ABC} y\,dx\,dz$$

$$\iint\limits_{-\Delta AOC} y\,dx\,dz=+\iint\limits_{D} 0\cdot dx\,dz=0$$

$$\iint\limits_{-\Delta AOB} y\,dx\,dz=\left|\begin{array}{l}\text{vektor normale } \Delta AOB\\ \text{je okomit na } y\text{-osu}\end{array}\right|=0$$

$$\iint\limits_{-\Delta OBC} y\,dx\,dz=\left|\begin{array}{l}\text{vektor normale } \Delta OBC\\ \text{je okomit na } y\text{-osu}\end{array}\right|=0$$

$$\iint\limits_{-\Delta ABC} y\,dx\,dz = \left| \begin{array}{l} \text{vektor normale } \vec{n}^{\circ} \text{ na} \\ \Delta ABC \text{ sa } Y\text{-osom zaklapa} \\ \text{ugao } \beta \text{ koji je između } 90^\circ \text{ i } 180^\circ \\ \text{ZAŠTO? (vidi sliku)} \\ \cos\beta < 0 \end{array} \right| = -\iint\limits_D (1-x-z)\,dx\,dz =$$

$$= -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-z)\,dz = -\int_0^1 \left(z\Big|_0^{1-x} - xz\Big|_0^{1-x} - \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= -\int_0^1 \left(1-x - x(1-x) - \frac{1}{2}\underbrace{(1-x)^2}_{1-2x+x^2} \right) dx = -\int_0^1 \left(1 - x - \cancel{x} + x^2 - \frac{1}{2} + \cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx = -\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x\Big|_0^1 \right) = -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6}$$

traženo rješenje

II način

Možemo upotrebiti formulu Gauss-Ostrogradski

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

Ω - oblast koju ograničava površ S

U našem slučaju $P(x,y,z) = R(x,y,z) = 0$

$$Q(x,y,z) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$$

$$K = \oiint\limits_{-W} y\,dx\,dz = -\iiint\limits_\Omega dx\,dy\,dz = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{primjetimo da smo sličan} \\ \text{integral već imali u prethodnom} \\ \text{slučaju} \end{array} \right| = \ldots = -\frac{1}{6}$$

traženo rješenje

(#) Izračunati cirkulaciju polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ duž odsječka prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

Rj. Cirkulacija vektorskog polja $\underset{\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)}{\vec{v}}$ duž krive c je integral

$$C = \int_c v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz .$$

U našem slučaju $\vec{v} = (x,\ y,\ x+y-1)$, dok je c dio prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

Imamo krivolinijski integral druge vrste

$$C = \int_c x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$$

$A(1,1,1)$
$B(2,3,4)$

Kako glasi jednačina prave kroz dvije tačke u prostoru?

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \qquad (=t)$$

Napišimo pravu u parametarskom obliku:

$x = t+1$
$y = 2t+1$
$z = 3t+1$

Dio prave između tačke $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$ je za $t \in [0,1]$.

$dx = dt,\quad dy = 2\,dt,\quad dz = 3\,dt$

$$C = \int_0^1 (t+1)\,dt + (2t+1)\,2\,dt + (3t+1)\,3\,dt = \int_0^1 (t+1+4t+2+9t+3)\,dt$$

$$= \int_0^1 (14t+6)\,dt = 14\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 + 6t\Big|_0^1 = 7+6 = 13$$

vrijednost cirkulacije polja